Marţi, 18 iulie 2017

Problema 1. Pentru orice număr natural $a_0 > 1$ definim şirul $a_0, a_1, a_2, \ldots$ prin:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n}, & \text{dacă } \sqrt{a_n} \text{ este întreg} \\ a_n + 3, & \text{în caz contrar} \end{cases}, \quad \text{pentru orice } n \geqslant 0.$$

Determinaţi toate valorile lui a_0 pentru care există un număr A astfel încât $a_n = A$ pentru o infinitate de valori ale lui n.

Problema 2. Fie $\mathbb{R}$ mulţimea numerelor reale. Determinaţi toate funcţiile $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât, pentru orice numere reale x şi y,

$$f\left(f(x)f(y)\right) + f(x+y) = f(xy).$$

Problema 3. Un vânător şi un iepure invizibil joacă un joc în planul euclidian. Punctul de pornire al iepurelui, A_0, şi punctul de pornire al vânătorului, B_0, coincid. După $n-1$ runde ale jocului, iepurele se află în punctul A_{n-1} şi vânătorul se află în punctul B_{n-1}. În a n-a rundă a jocului se întâmplă, în ordine, următoarele:

(i) fără să fie văzut, iepurele se deplasează într-un punct A_n, astfel încât distanţa dintre A_{n-1} şi A_n să fie exact 1;

(ii) un dispozitiv de urmărire îi indică vânătorului un punct P_n. Singura informaţie pe care dispozitivul i-o dă vânătorului este aceea că distanţa de la P_n la A_n este mai mică sau egală cu 1;

(iii) vânătorul se deplasează într-un punct B_n, vizibil, astfel încât distanţa de la B_{n-1} la B_n este exact 1.

Este totdeauna posibil ca, indiferent de felul în care se deplasează iepurele şi indiferent de punctele indicate de dispozitiv, vânătorul să-şi aleagă mişcările astfel încât după 10^9 runde să fie sigur că distanţa dintre el şi iepure este mai mică sau egală cu 100?

Miercuri, 19 iulie 2017

Problema 4. Fie R şi S puncte diferite pe un cerc Ω, care nu sunt diametral opuse. Fie ℓ tangenta la Ω în R. Punctul T este simetricul lui R faţă de S. Punctul J este ales pe arcul mic RS al lui Ω, astfel încât cercul Γ circumscris triunghiului JST intersectează ℓ în două puncte distincte. Fie A punctul de intersecţie dintre Γ şi ℓ, cel mai apropiat de R. Dreapta AJ intersectează din nou Ω în K. Demonstraţi că dreapta KT este tangentă la Γ.

Problema 5. Se consideră un număr natural $N \geqslant 2$. Un număr de $N(N+1)$ fotbalişti, oricare doi de înălţimi diferite, stau într-un rând. Antrenorul vrea să elimine $N(N-1)$ jucători din acest rând, astfel încât în noul rând de $2N$ jucători să fie îndeplinite următoarele N condiţii:

(1) nu se află nimeni între cei mai înalţi doi jucători;

(2) nu se află nimeni între al treilea şi al patrulea cei mai înalţi jucători;

$\vdots$

(N) nu se află nimeni între cei mai scunzi doi jucători.

Arătaţi că acest lucru este totdeauna posibil.

Problema 6. O pereche ordonată (x, y) de numere întregi este un *punct primitiv* dacă cel mai mare divizor comun al numerelor x şi y este 1. Dându-se o mulţime finită S de puncte primitive, demonstraţi că există un număr natural $n \geq 1$ şi numerele întregi a_0, a_1, $\ldots$, a_n astfel încât, pentru orice (x, y) din S:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$

Language: Romanian

Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte